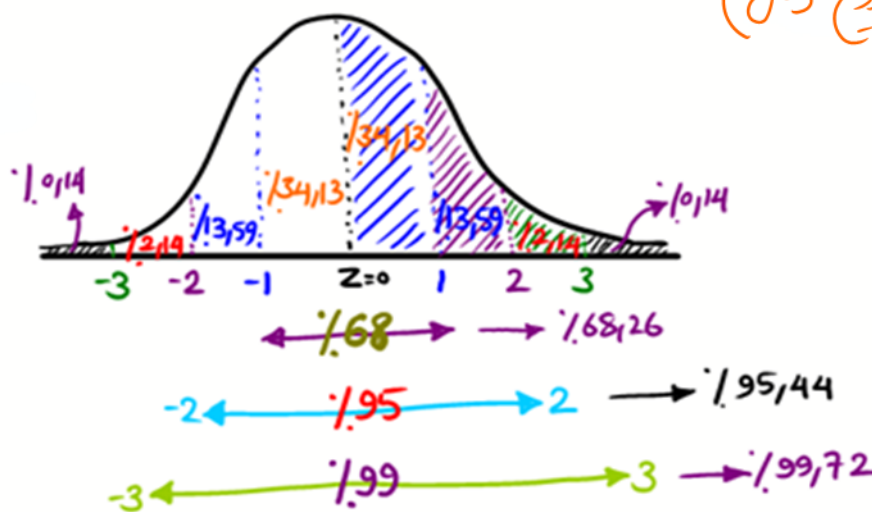


## متغیر استاندارد

چون داده‌های آماری خام قابل تکمیل نیست، معمولاً دامنه تغییرات بزرگی دارد مناسب است توزیع آماری را به متغیر جدیدی تبدیل کنیم که نقطه صفت را نداشته باشد که به آن متغیر استاندارد گفته می‌شود و با  $z$  نمایش داده می‌شود، اگر میانگین توزیع  $\mu$  و انحراف معیار  $\sigma$  باشد:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow \text{توزیع } z \begin{cases} \mu_z = 0 \\ \sigma_z = 1 \end{cases}$$



تذکره: هرگاه در سوال اشاره به توزیع نرمال شود و اطلاعات میانگین و انحراف معیار توزیع داده شود و سوالات درصد، نسبت و احتمال پرسیده شود، هدف ما تبیین مساحت زیر منحنی نرمال خواهد بود.

مسال: میانگین و انحراف استاندارد یک توزیع نرمال 70، 12 است، چند درصد از آزمودنی‌ها بین نمرات 58 تا 94 را به خود اختصاص داده‌اند؟

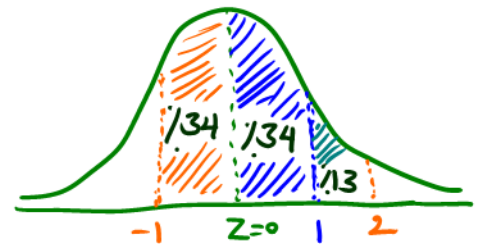
(1) 1.47 (2) 1.68 (3) 1.82 ✓ (4) 1.99

چند درصد توزیع است؟  $\mu = 70$   $\sigma = 12$   $58 < x < 94$   $\xrightarrow{\text{توزیع نرمال}}$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \xrightarrow{58 < x < 94} \frac{58 - \mu}{\sigma} < \frac{x - \mu}{\sigma} < \frac{94 - \mu}{\sigma}$$

$$\frac{58 - 70}{12} < Z < \frac{94 - 70}{12} \rightarrow -1 < Z < 2$$

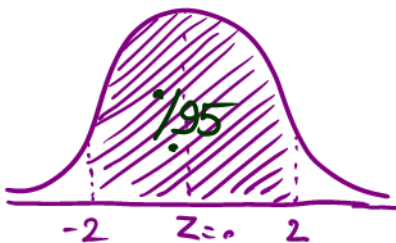
اندکی بیشتر از 1/81 است  $\rightarrow 1/81 = 0.0123$  جواب.



مسال: در یک توزیع نرمال از یک کلاس، میانگین و انحراف استاندارد نمرات آنها به ترتیب برابر 13 و 4 است، نمره 95٪ از دانشجویان درجه ناصله‌ای قرار دارد؟

(1) 23.3 - 2.6 (2) 20.8 - 5.16 ✓ (3) 16.6 - 9.4 (4) 20.8 - 4.84

در چه بازه‌ای قرار دارد؟  $\mu = 13$   $\sigma = 4$   $\xrightarrow{95\% \text{ توزیع}}$   $\text{توزیع نرمال}$



$$95\% \text{ توزیع} \rightarrow -2 < Z < 2$$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \begin{cases} -2 = \frac{x - 13}{4} \rightarrow x = 5 \\ 2 = \frac{x - 13}{4} \rightarrow x = 21 \end{cases}$$

جواب دقیق  $-2 < Z < 2 \rightarrow 5 < x < 21$

۱۶- اگر  $X$  دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  و در توزیع نرمال استاندارد  $P(Z > 1/96) = 0/025$  باشد،

آنگاه  $P(\mu - 1/96\sigma < X < \mu)$  برابر است با: (دکترای ۹۵)

۰/۹۷۵ (۴)

۰/۴۷۵ (۳) ✓

۰/۴۵ (۲)

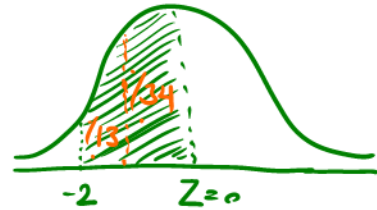
۰/۹۵ (۱)

$\mu$  } توزیع نرمال  $\rightarrow P(\mu - 1,96\sigma < X < \mu) = ? \rightarrow$  احتمال = ?

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu) = P\left(\frac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{\mu - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P\left(\frac{-2\sigma}{\sigma} < Z < 0\right) = P(-2 < Z < 0)$$

اندکی بیشتر از ۰/۴۷  $\rightarrow$  ۰/۴۷ = جواب



۵۹- فرض کنید توزیع ضخامت پاک‌کن‌های تولیدی یک دستگاه به صورت  $X \sim N(11, 2)$  است. ضخامت ۹۰ درصد

پاک‌کن‌های تولیدی در چه دامنه‌ای در دو طرف میانگین قرار می‌گیرد؟ (ارز ۱۴۰۰)

(در توزیع نرمال استاندارد:  $P(Z \leq -1/64) = 0/05$ ,  $P(Z \geq 1/28) = 0/1$ )

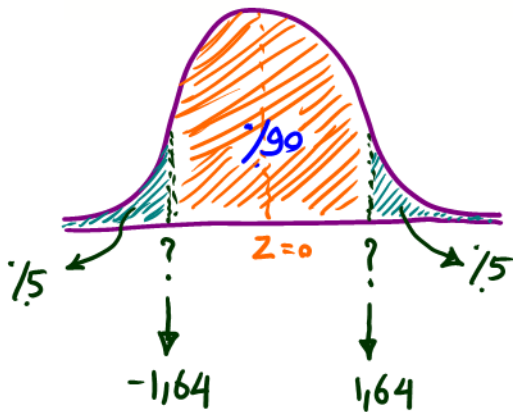
$X \sim N$  }  $\mu = 11$   
                     $\sigma = 2$   $\xrightarrow[\text{توزیع ۰/۹۰}]{\text{توزیع نرمال}}$  = در چه فاصله‌ای است؟

[۷/۷۲, ۱۴/۲۸] (۱) ✓

[۸/۴۴, ۱۳/۵۶] (۲)

[۹/۳۶, ۱۲/۶۴] (۳)

[۹/۷۲, ۱۲/۲۸] (۴)



$\rightarrow -1,64 < Z < 1,64 \rightarrow$  = گزود.  $X$  = ?

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \begin{cases} Z = -1,64 \rightarrow -1,64 = \frac{X - 11}{2} \rightarrow -3,28 = X - 11 \rightarrow X = 7,72 \\ Z = 1,64 \rightarrow 1,64 = \frac{X - 11}{2} \rightarrow 3,28 = X - 11 \rightarrow X = 14,28 \end{cases}$$

$-1,64 < Z < 1,64 \rightarrow 7,72 < X < 14,28$

توزیع ناشناخته

متغی های غیر نرمال

اگر تست اشاره ای به نرمال بودن نکرده باشد، باید فرض را بر غیر نرمال بودن قرار دهیم.

نامساوی چی پی شرف

اگر توزیع ناشناخته باشد (توزیع غیر نرمال) داریم.

بیرون فاصله

حد اکثر

$$P(|x-\mu| > a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

$$P(|x-\mu| < a) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{a^2}$$

حد اقل

داخل فاصله

م

۱- اگر متغیر  $x$  دارای میانگین ۲۵ و واریانس ۱۶ باشد، با استفاده از قضیه چی پی شرف حداقل احتمال وقوع

$17 < x < 33$  کدام است؟ (دکری ۹۷)

۰/۶۴ (۱)

۰/۸ (۲)

۰/۷۵ (۳) ✓

۰/۷۲ (۴)

حد اقل  $\rightarrow$  قضیه چی پی شرف

$$P(|x-\mu| < a) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{a^2} \rightarrow \text{حزب سوال}$$

$$17 < x < 33 \rightarrow 17 - \mu < x - \mu < 33 - \mu$$

$$\xrightarrow{\mu=25} -8 < x - \mu < 8 \rightarrow |x - \mu| < 8 \rightarrow a=8$$

$$\text{حزب سوال} = 1 - \frac{\sigma^2}{a^2} = 1 - \frac{16}{64} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4} = 0.75$$

۱۸- فرض کنید که بدانیم تعداد اقلام تولیدشده در یک کارخانه در طول یک هفته متغیر تصادفی با میانگین ۵۰ و

واریانس ۲۵ باشد، در این صورت احتمال این که تولید هفتگی بین ۴۰ و ۶۰ باشد چقدر است؟ (ارشد ۱۴۰۱)

(۱) حداکثر ۷۵٪ (۲) حداقل ۷۵٪ (۳) حداکثر ۲۵٪ (۴) حداقل ۲۵٪

صورت سوال اشاره ای به نرمال نداشته است → توزیع غیر نرمال  $\left\{ \begin{array}{l} \mu = 50 \\ \sigma^2 = 25 \end{array} \right.$  → احتمال = ؟  
↓  
قضیه همی بی سوف

داخل فاصله  $40 < x < 60$

$$P(|x - \mu| < a) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{a^2} \rightarrow \text{جواب تست}$$

$$40 < x < 60 \rightarrow 40 - \mu < x - \mu < 60 - \mu$$

$$\xrightarrow{\mu=50} 40 - 50 < x - 50 < 60 - 50$$

$$-10 < x - 50 < 10 \rightarrow |x - 50| < 10 \rightarrow a = 10$$

$$\text{حداقل} = 1 - \frac{\sigma^2}{a^2} = 1 - \frac{25}{100} = \frac{75}{100} = 0.75 \rightarrow \text{حداقل}$$

۸- اگر میانگین یک جامعه با توزیع نامشخص  $\mu_x = 10$  و واریانس آن  $\sigma_x^2 = 4$  باشد حداقل چند درصد از داده ها در

فاصله (۶، ۱۴) است؟ (دکتری ۹۶)

(۲) ۵۰

(۱) ۷۵ ✓

(۴) قابل محاسبه نیست

(۳) ۹۵

توزیع نامشخص  $\left\{ \begin{array}{l} \mu = 10 \\ \sigma^2 = 4 \end{array} \right.$  →  $6 < x < 14$  → قضیه همی بی سوف  
↓  
داخل فاصله  $6 < x < 14$

$$P(|x - \mu| < a) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{a^2} \rightarrow \text{جواب سوال}$$

$$6 < x < 14 \xrightarrow{-10} -4 < x - 10 < 4 \rightarrow |x - 10| < 4 \rightarrow a = 4$$

$$\text{جواب} = 1 - \frac{\sigma^2}{a^2} = 1 - \frac{4}{16} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75 = 75\%$$

سوال: در یک توزیع میانگین 71 و انحراف معیار 4 است، حداقل 36 درصد توزیع در کدام فاصله است؟

$$(67, 75) \quad (4)$$

$$(66, 76) \quad (3) \quad \checkmark$$

$$(65, 77) \quad (2)$$

$$(64, 78) \quad (1)$$

توزیع میانگین  $\mu = 71$  و انحراف معیار  $\sigma = 4 \rightarrow \sigma^2 = 16$   $\rightarrow$  فاصله چقدر است؟  $\rightarrow$  حداقل 36٪  $\rightarrow$  فاصله = ؟

$$P(|x - \mu| < a) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{a^2} \rightarrow 1 - \frac{\sigma^2}{a^2} = 0.36$$

$$1 - \frac{16}{a^2} = 0.36 \rightarrow 1 - 0.36 = \frac{16}{a^2} \rightarrow 0.64 = \frac{16}{a^2}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} 0.8 = \frac{4}{a} \rightarrow a = \frac{4}{0.8}$$

$$a = 5$$

$$|x - \mu| < a \rightarrow |x - 71| < 5$$

$$-5 < x - 71 < 5 \xrightarrow{+71} 66 < x < 76$$